Лабораторная работа №2
Численное решение нелинейных уравнений и систем

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

№ варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной.

1 Вычислительная реализация задачи:

Состоит из двух частей и отражается ТОЛЬКО в отчете.

1 часть. Решение нелинейного уравнения

Задание:

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
2. Определить интервалы изоляции корней.
3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.
4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удержать **3 знака** после запятой.
   - 5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
   - 5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
   - 5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
   - 5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
   - **5.5** Для метода простой итерации заполнить таблицу 5. **Проверить условие сходимости метода на выбранном интервале.**
6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

Таблица 1

Уточнение корня уравнения методом половинного деления

№ шага	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\lvert a-b\rvert$
1							
2							
3….							

Таблица 2

Уточнение корня уравнения методом хорд

№ шага	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
1							
2							
3….							

Таблица 3

Уточнение корня уравнения методом Ньютона

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
1					
2					
3…					

Таблица 4

Уточнение корня уравнения методом секущих

№ итерации	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
1					
2					
3…					

Таблица 5

Уточнение корня уравнения методом простой итерации

№ итерации	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
1				
2				
3…				

Таблица 6

Вид нелинейного уравнения для вычислительной реализации

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$2{,}74x^3-1{,}93x^2-15{,}28x-3{,}72$	14	$2{,}3x^3+5{,}75x^2-7{,}41x-10{,}6$
2	$-1{,}38x^3-5{,}42x^2+2{,}57x+10{,}95$	15	$-2{,}4x^3+1{,}27x^2+8{,}63x+2{,}31$
3	$x^3+2{,}84x^2-5{,}606x-14{,}766$	16	$5{,}74x^3-2{,}95x^2-10{,}28x-3{,}23$
4	$x^3-1{,}89x^2-2x+1{,}76$	17	$-0{,}38x^3-3{,}42x^2+2{,}51x+8{,}75$
5	$-2{,}7x^3-1{,}48x^2+19{,}23x+6{,}35$	18	$x^3+2{,}64x^2-5{,}41x-11{,}76$
6	$2x^3+3{,}41x^2-23{,}74x+2{,}95$	19	$2x^3-1{,}89x^2-5x+2{,}34$
7	$x^3+2{,}28x^2-1{,}934x-3{,}907$	20	$-2{,}8x^3-3{,}48x^2+10{,}23x+9{,}35$
8	$3x^3+1{,}7x^2-15{,}42x+6{,}89$	21	$1{,}8x^3-2{,}47x^2-5{,}53x+1{,}539$
9	$-1{,}8x^3-2{,}94x^2+10{,}37x+5{,}38$	22	$x^3-3{,}78x^2+1{,}25x+3{,}49$
10	$x^3-3{,}125x^2-3{,}5x+2{,}458$	23	$-x^3+5{,}67x^2-7{,}12x+1{,}34$
11	$4{,}45x^3+7{,}81x^2-9{,}62x-8{,}17$	24	$x^3-2{,}92x^2+1{,}435x+0{,}791$
12	$x^3-4{,}5x^2-9{,}21x-0{,}383$	25	$x^3-2{,}56x^2-1{,}325x+4{,}395$
13	$x^3+4{,}81x^2-17{,}37x+5{,}38$	26	$x^3-2{,}18x^2-3{,}27x+1{,}43$

Выбор метода для вычислительной реализации задачи (табл. 1-5)

1 – Метод половинного деления
2 – Метод хорд
3 – Метод Ньютона
4 – Метод секущих
5 – Метод простой итерации

Таблица 7

Методы для вычислительной реализации

№ варианта	*Крайний правый корень*	*Крайний левый корень*	*Центральный корень*	№ варианта	*Крайний правый корень*	*Крайний левый корень*	*Центральный корень*
1	1	4	5	14	3	5	1
2	5	2	4	15	5	1	4
3	1	5	3	16	2	5	3
4	5	1	4	17	1	4	5
5	2	5	4	18	3	5	2
6	3	2	5	19	5	1	4
7	1	5	3	20	1	3	5
8	5	2	4	21	2	3	5
9	1	5	4	22	5	3	1
10	3	1	5	23	4	5	1
11	1	4	5	24	2	3	5
12	4	5	2	25	5	1	4
13	5	2	3	26	2	5	3

2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

Задание:

1. Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически (вид системы представлен в табл. 8).
2. Используя указанный метод, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,01.
3. Для метода простой итерации проверить условие сходимости метода.
4. Подробные вычисления привести в отчете.

Таблица 8

Система нелинейных уравнений для вычислительной реализации

№ варианта	Система нелинейных уравнений	Метод
1	$\begin{cases} sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + cosy = 2 \end{cases}$	Метод простой итерации
2	$\begin{cases} tg(xy + 0{,}1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	Метод Ньютона
3	$\begin{cases} cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - cosy = 3 \end{cases}$	Метод простой итерации
4	$\begin{cases} sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	Метод Ньютона
5	$\begin{cases} tg(xy + 0{,}3) = x^2 \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	Метод Ньютона
6	$\begin{cases} sinx + 2y = 2 \\ x + \cos(y-1) = 0{,}7 \end{cases}$	Метод простой итерации
7	$\begin{cases} 2x - sin(y - 0{,}5) = 1 \\ y + cosx = 1{,}5 \end{cases}$	Метод простой итерации
8	$\begin{cases} tgxy = x^2 \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	Метод Ньютона
9	$\begin{cases} sin(x+y) = 1{,}5x - 0{,}1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	Метод Ньютона

10	$\begin{cases} sin(x+0{,}5)-y=1 \\ \cos(y-2)+x=0 \end{cases}$	Метод простой итерации
11	$\begin{cases} tg(xy+0{,}2)=x^2 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$	Метод Ньютона
12	$\begin{cases} x+siny=-0{,}4 \\ 2y-\cos(x+1)=0 \end{cases}$	Метод простой итерации
13	$\begin{cases} siny+2x=2 \\ y+\cos(x-1)=0{,}7 \end{cases}$	Метод простой итерации
14	$\begin{cases} sin(x+y)-1{,}4x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$	Метод Ньютона
15	$\begin{cases} sin(x-1)+y=1{,}5 \\ x-\sin(y+1)=1 \end{cases}$	Метод простой итерации
16	$\begin{cases} y-cosx=2 \\ x+\cos(y-1)=0{,}8 \end{cases}$	Метод простой итерации
17	$\begin{cases} tgxy=x^2 \\ 0{,}5x^2+2y^2=1 \end{cases}$	Метод Ньютона
18	$\begin{cases} sin(y+2)-x=1{,}5 \\ y+\cos(x-2)=0{,}5 \end{cases}$	Метод простой итерации
19	$\begin{cases} sin(y-1)+x=1{,}3 \\ y-\sin(x+1)=0{,}8 \end{cases}$	Метод простой итерации
20	$\begin{cases} sin(x+y)-1{,}1x=0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$	Метод Ньютона
21	$\begin{cases} cosy+x=1{,}5 \\ 2y-\sin(x-0{,}5)=1 \end{cases}$	Метод простой итерации
22	$\begin{cases} tg(xy+0{,}3)=x^2 \\ 0{,}5x^2+2y^2=1 \end{cases}$	Метод Ньютона
23	$\begin{cases} sin(y+0{,}5)-x=1 \\ y+\cos(x-2)=0 \end{cases}$	Метод простой итерации
24	$\begin{cases} sin(x-y)-xy=-1 \\ 0{,}3x^2+y^2=2 \end{cases}$	Метод Ньютона
25	$\begin{cases} cos(x+0{,}5)+y=1 \\ siny-2x=2 \end{cases}$	Метод простой итерации
26	$\begin{cases} cos(x+0{,}5)+y=0{,}7 \\ siny-0{,}5x=2 \end{cases}$	Метод простой итерации

2 Программная реализация задачи:

Для нелинейных уравнений:

1. Все численные методы (см. табл. 9) должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм/методов/классов.
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.
4. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.
5. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом, простой итерации), выбор начального приближения x_0 (a или b) вычислять в программе.
6. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале.
7. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя.

8. Организовать вывод графика функции, график должен полностью отображать весь исследуемый интервал.

Для систем нелинейных уравнений:

1. Пользователь выбирает предлагаемые программой системы двух нелинейных уравнений (2-3 системы).
2. Организовать вывод графика функций.
3. Начальные приближения ввести с клавиатуры.
4. Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости.
5. Организовать вывод вектора неизвестных: $x_1,\ x_2$.
6. Организовать вывод количества итераций, за которое было найдено решение.
7. Организовать вывод вектора погрешностей: $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$
8. Проверить правильность решения системы нелинейных уравнений.

Выбор метода для программной реализации задачи

Решение нелинейных уравнений:

1 – Метод половинного деления
2 – Метод хорд
3 – Метод Ньютона
4 – Метод секущих
5 – Метод простой итерации

Решение систем нелинейных уравнений:

6 – Метод Ньютона
7 – Метод простой итерации

Таблица 9

Методы, реализуемые в программе

№ варианта	Методы в программе	№ варианта	Методы в программе
1	2, 3, 5, 6	14	2, 4, 5, 7
2	1, 3, 5, 7	15	2, 3, 5, 6
3	2, 4, 5, 6	16	1, 4, 5, 6
4	2, 3, 5, 7	17	2, 3, 5, 7
5	1, 3, 5, 7	18	1, 4, 5, 6
6	1, 4, 5, 6	19	2, 3, 5, 6
7	2, 4, 5, 6	20	2, 4, 5, 7
8	1, 3, 5, 7	21	1, 4, 5, 6
9	2, 3, 5, 7	22	2, 4, 5, 7
10	2, 4, 5, 6	23	2, 3, 5, 6
11	2, 3, 5, 7	24	1, 4, 5, 7
12	1, 3, 5, 6	25	2, 3, 5, 6
13	1, 4, 5, 6	26	1, 4, 5, 6

3 Оформить отчет, который должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Цель лабораторной работы.
3. Порядок выполнения работы.
4. Рабочие формулы используемых методов.
5. Графики функций на исследуемом интервале.
6. Заполненные таблицы вычислительной части 1 лабораторной работы (в зависимости от варианта: табл. 1 – 5).
7. Подробное решение системы нелинейных уравнений (вычислительная часть 2).
8. Листинг программы, по крайней мере, коды используемых методов.
9. Результаты выполнения программы при различных исходных данных.
10. Выводы

Контрольные вопросы к защите лабораторной работы:

1. Понятие точного и приближенного решений нелинейного уравнения.
2. Основная идея метода половинного деления?
3. Может ли метод половинного деления найти точное значение корня уравнения?
4. В чем суть метода Ньютона?
5. Как выбирается начальное приближение для метода Ньютона?
6. Идея метода хорд?
7. Как выбирается начальное приближение для метода хорд с фиксированным концом интервала изоляции корня?
8. По каким причинам методы хорд и касательных предпочтительнее метода простой итерации?
9. Какой из методов является двухшаговым методом? Как запустить этот метод?
10. В чем суть метода простой итерации?
11. Каковы условия применяемости метода простой итерации?
12. Как правильно преобразовать исходное нелинейное уравнение $y = f(x)$ к виду $x = \varphi(x)$?
13. Каковы основные критерии окончания итерационного процесса?
14. Как оценить необходимое количество итераций в методе биссекции при заданной точности?
15. Алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона?
16. Каковы преимущества и недостатки графического метода отделения решения для системы двух нелинейных уравнений?
17. В каких случаях можно применить метод простой итерации для решения системы нелинейных уравнений?
18. Когда можно считать итерационный процесс законченным при использовании метода простой итерации для решения системы нелинейных уравнений?
19. Что такое сходимость и скорость сходимости численных методов?
20. Дайте определение устойчивости итерационного метода?
21. Какой метод решения нелинейных уравнений наиболее чувствителен к выбору начального приближения (с точки зрения скорости сходимости)?
22. Возможно ли применение метода Ньютона для решения уравнения $x^3 - x^2 - 25x + 2 = 0$ на интервале [5, 6]?
23. Пусть применен один шаг метода хорд для решения нелинейного уравнения $x^3 - x^2 - 25x + 2 = 0$ на интервале [5, 6]. Какой интервал будет получен для дальнейшего вычисления корня?
24. За какое количество итераций возможно решение нелинейных уравнений методом бисекций на отрезке [0; 2] с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$?
25. Сколько итераций необходимо для решения уравнения $x + 2 = 0$ методом бисекций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ на отрезке [-3; -1]?